КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Основные определения и формулы

Положение материальной точки в декартовой системе координат (рис.1.1) задается *радиус-вектором* $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{1.1}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы (орты) направлений; x, y, z - координаты точки.

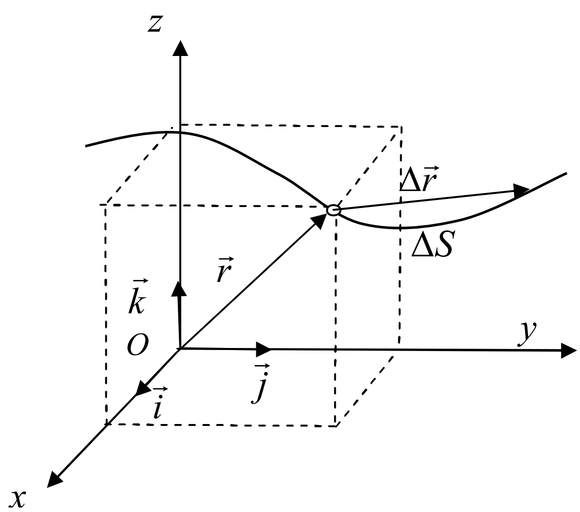

Рис. 1.1

Модуль радиус-вектора $\vec{r}$ определяется выражением:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{1.2}$$

Средняя путевая скорость определяется по формуле:

$$\upsilon_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \tag{1.3}$$

где ΔS – путь, пройденный материальной точкой за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$, где t_1 – время начала прохождения, t_2 – время, окончания прохождения материальной точки данного участка пути.

Средняя скорость определяется выражением:

$$\vec{\upsilon}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \tag{1.4}$$

где $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – перемещение материальной точки за время Δt, $\vec{r}_1$ – радиус-вектор материальной точки в момент времени t_1, $\vec{r}_2$ – радиус-вектор материальной точки в момент времени t_2.

Мгновенная скорость есть векторная величина, определяемая как производная радиус-вектора по времени:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\,. \tag{1.5}$$

Модуль вектора скорости $\vec{\upsilon}$ определяется выражением:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\,, \tag{1.6}$$

где $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$, $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$, $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$ – компоненты вектора скорости.

Мгновенное (полное) ускорение есть векторная величина, определяемая как производная вектора скорости по времени (или как вторая производная радиус-вектора по времени):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.7}$$

В случае прямолинейного равномерного движения: $\vec{\upsilon} = const$, $S = \upsilon t$.

В случае прямолинейного равнопеременного движения: $\vec{a} = const$, тогда всегда выполнимы два уравнения:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at; \qquad S = S_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{1.8}$$

причем ускорение положительно при равноускоренном движении и отрицательно при равнозамедленном.

При криволинейном движении *модуль полного ускорения* равен:

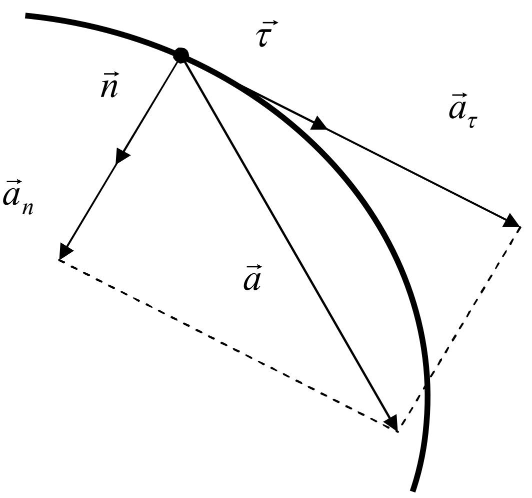

Рис. 1.2

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}, \tag{1.9}$$

где a_τ – *тангенциальное (касательное) ускорение*; a_n – *нормальное (центростремительное) ускорение*; R – радиус кривизны траектории (рис.1.2).

Положение твердого тела (при заданной оси вращения) определяется угловой координатой (углом поворота) φ. Малый угол поворота можно описывать псевдовектором $d\vec{\varphi}$, называемым *вектором углового перемещения*. В системе СИ единицей угла является *радиан* $[\varphi] = 1$ *рад*. Угловая скорость есть производная угла поворота по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \text{ и для модуля } |\omega| = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.10}$$

Соответственно *угловым ускорением* называется величина, определяемая выражением (для модуля):

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{d^2t}. \tag{1.11}$$

В случае равномерного вращения тела его *угловая скорость,* или *циклическая частота вращения* равна:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \tag{1.12}$$

где T – период вращения; ν – частота вращения.

При равнопеременном вращении всегда выполнимы два уравнения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{1.13}$$

где φ_0 и ω_0 – угловое перемещение и скорость, соответственно, в начальный момент времени.

Вектор линейной и угловой скоростей связаны соотношением:

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}\vec{r}]. \tag{1.14}$$

Модули угловой и линейной скорости связаны соотношением:

$$\upsilon = \omega R, \tag{1.15}$$

где R – радиус кривизны траектории движения материальной точки.

Тангенциальное и нормальное ускорения при вращательном движении определяются, соответственно, выражениями:

$$a_\tau = \varepsilon R \text{ и } a_n = \omega^2 R. \tag{1.16}$$

Модуль полного ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{1.17}$$

1.2. Примеры решения задач по кинематике

1.1. Две автомашины одновременно из одного и того же пункта начинают прямолинейное движение в одном направлении. Зависимость пройденного пути от времени выражается уравнениями: $s_1 = at + bt^2$; $s_2 = ct + dt^2 + et^3$***, где a, в, c, d, e – некоторые коэффициенты. Чему равна относительная скорость автомобилей? Определить единицы измерения коэффициентов a, в, c, d, e в системе СИ.***

Решение.

Скорости связаны выражением: $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_0$ или в скалярном виде: $\upsilon_1 = \upsilon_2 + \upsilon_0$, где υ_0 - скорость первого автомобиля относительно второго. Т.к. движение происходит в одном направлении, имеем: $\upsilon_0 = \upsilon_1 - \upsilon_2$. Скорости первой и второй автомашины равны, соответственно:

$$\upsilon_1 = \frac{ds_1}{dt} = a + 2bt; \qquad \upsilon_2 = \frac{ds_2}{dt} = c + 2dt + 3et^2.$$

Окончательно получим:

$$\upsilon_0 = (a-c) + 2(b-d)t - 3et^2.$$

Определим единицы измерения коэффициентов:

$$[a] = [c] = \frac{[S]}{[t]} = \frac{м}{с}; \ [b] = [d] = \frac{[S]}{[t^2]} = \frac{м}{с^2}; \ [e] = \frac{[S]}{[t^3]} = \frac{м}{с^3}.$$

Определим единицу измерения скорости:

$$[\upsilon_0] = [a] + [c] + [bt] + [dt] + [et^2] = \frac{м}{с}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = (a - c) + 2(b - d)t - 3et^2 \left({}^{м}\!/_{с} \right)$.

1.2. Две автомашины движутся по двум взаимно перпендикулярным и прямолинейным траекториям по направлению к перекрестку с постоянными скоростями 13,9 м/с и 27,7 м/с. В начальный момент времени первая точка находилась на расстоянии 100 м от перекрестка, а вторая – на расстоянии 50 м. Через сколько времени расстояние между ними будет минимальным?

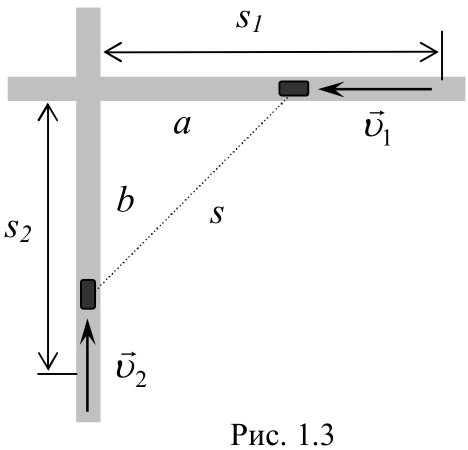

Рис. 1.3

Решение.

Путь, который каждой из автомашин остается пройти до перекрестка через некоторый промежуток времени t, составит (рис. 1.3):

$$a = s_1 - \upsilon_1 t; \;\; b = s_2 - \upsilon_2 t.$$

Расстояние s между точками представляет собой гипотенузу треугольника, которая является функцией времени и определяется теоремой Пифагора:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(s_1 - \upsilon_1 t)^2 + (s_2 - \upsilon_2 t)^2}.$$

По характеру задачи видно, что сначала автомашины сближаются, а затем удалятся друг от друга. Таким образом, будет наблюдаться лишь одно экстремальное значение, в нашем случае минимальное. Для определения времени t_{min} соответствующего минимуму функции S(t) возьмем первую производную по времени и приравняем ее к нулю:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\left[(s_1 - \upsilon_1 t)^2 + (s_2 - \upsilon_2 t)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[-2(s_1 - \upsilon_1 t)\upsilon_1 - 2(s_2 - \upsilon_2 t)\upsilon_2\right] =$$

$$= -\frac{(s_1 - \upsilon_1 t)\upsilon_1 + (s_2 - \upsilon_2 t)\upsilon_2}{\sqrt{(s_1 - \upsilon_1 t)^2 + (s_2 - \upsilon_2 t)^2}}.$$

Таким образом, получаем:

$$-\frac{(s_1 - \upsilon_1 t_{\min})\upsilon_1 + (s_2 - \upsilon_2 t_{\min})\upsilon_2}{\sqrt{(s_1 - \upsilon_1 t_{\min})^2 + (s_2 - \upsilon_2 t_{\min})^2}} = 0.$$

Отношение только тогда равно нулю, если равен нулю числитель, т.е.:

$$(s_1 - \upsilon_1 t_{\min})\upsilon_1 + (s_2 - \upsilon_2 t_{\min})\upsilon_2 = 0, \text{ отсюда } t_{\min} = \frac{s_1\upsilon_1 + s_2\upsilon_2}{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}.$$

Определим единицу измерения расчетной формулы, причем нет необходимости переводить единицы измерения в систему СИ, а достаточно их выразить в одинаковых единицах: $[t]=\dfrac{км\cdot км/ч}{(км/ч)^2}=ч$.

Подставим числовые значения в расчетную формулу:

$$t_{\min}=\frac{100\cdot 50+50\cdot 100}{(50)^2+(100)^2}=0{,}8\ (ч).$$

Ответ: $t_{\min}=0{,}8\ ч$.

1.3. Определить зависимость пути, пройденного телом, от времени, если ускорение тела пропорционально квадрату скорости и направлено в сторону, противоположную направлению движения. В начальный момент времени скорость была равна υ_0.

Решение.

По условию $\dfrac{d\upsilon}{dt}=-k\upsilon^2$, где k – коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon^2}=-k\,dt\,, \qquad \int\frac{d\upsilon}{\upsilon^2}=-\int k\,dt\,, \qquad \frac{1}{\upsilon}=k\,t+C\,,$$

где C – *const*.

В начальный момент времени $t=0$, скорость равна $\upsilon=\upsilon_0$, отсюда:

$$C=\frac{1}{\upsilon_0}, \qquad \frac{1}{\upsilon}=k\,t+\frac{1}{\upsilon_0}=\frac{k\,t\,\upsilon_0+1}{\upsilon_0}.$$

Тогда скорость равна: $\upsilon=\dfrac{\upsilon_0}{k\,t\,\upsilon_0+1}$. Так как $dS=\upsilon\,dt$, то после интегрирования получим:

$$S=\int\frac{\upsilon_0}{k\,t\,\upsilon_0+1}d\,t\,,$$

следовательно: $$S=\frac{1}{k}\ln(k\,t\,\upsilon_0+1)+C_1.$$

При $t=t_0=0$ константа C_1 определяется начальным положением, т.е. $C_1=S_0$. Окончательно получаем: $S=S_0+\dfrac{1}{k}\ln(k\,\upsilon_0 t+1)$.

Ответ: $S=S_0+\dfrac{1}{k}\ln(k\,\upsilon_0 t+1)$.

1.4. Скорость движения каретки токарного станка относительно его станины меняется по закону $\upsilon_к(x)=a(d-x)x+c$, где a – некоторый коэф-

фициент;** d* **– перемещение каретки;** *c* **– коэффициент, определяющий скорость движения каретки на начальном этапе**; *x* **– текущее координата каретки. На какое расстояние сместится каретка относительно первоначального положения, если скорость ее равна** υ_0 **и направлена перпендикулярно станины?

Решение.

Рассмотрим движение каретки в проекциях на оси *OX* и *OY* (рис. 1.4). Вдоль оси *OX* каретка движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\upsilon_x = \upsilon_0$, тогда время движения переправы будет равно:

$$t_n = \frac{d}{\upsilon_0}.$$

Находясь от берега на расстоянии $0 \le x \le d$, скорость лодки по течению, т.е. вдоль оси *OY*, будет равна скорости течения реки, тогда, согласно условию задачи, имеем: $\upsilon_y(x) = \upsilon_к(x) = a(d - x)x + c$. За время dt каретка сместится вдоль оси *OY* на величину:

$$d\,y = \upsilon_к(x)\,dt\,.$$

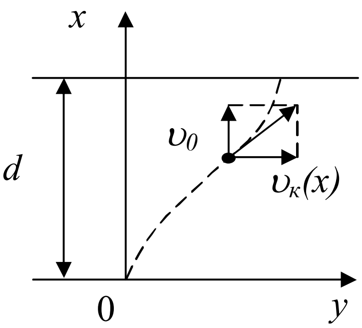

Рис. 1.4. Движение каретки

В этом случае, расстояние *S*, на которое снесет лодку, равно:

$$S = \int_0^{t_n} \upsilon_к(x)\,dt = \int_0^{t_n} \big(a(d - x)x + c\big)dt\,. \quad (1)$$

За тоже время dt в направлении оси *OX* каретка переместится на $d\,x = \upsilon_0\,dt$, отсюда получаем:

$$d\,t = \frac{d\,x}{\upsilon_0}. \quad (2)$$

Переходя от переменной интегрирования dt к dx, получаем:

$$S = \frac{1}{\upsilon_0}\int_0^d \big(c - a(x - d)x\big)dx = \frac{1}{\upsilon_0}\left(c\,x - \frac{a\,x^3}{3} + \frac{a\,d\,x^2}{2}\right)\Bigg|_0^d = \frac{d}{\upsilon_0}\left(c + \frac{ad^2}{2} - \frac{ad^2}{3}\right).$$

После преобразования, получим $S = \dfrac{d}{\upsilon_0}\left(c + \dfrac{ad^2}{6}\right)$.

Ответ: $S = \dfrac{d}{\upsilon_0}\left(c + \dfrac{ad^2}{6}\right)$.

1.5. Два тела начали свободно падать с одной и той же высоты, одно вслед за другим через интервал времени, τ. Через какое время t, считая от начала падения первого тела, расстояние между телами будет равно ℓ?

Решение.

Если время падения первого тела t, то время падения второго тела будет $(t-\tau)$, и уравнения движения обоих тел примут вид:

$$h_1 = \frac{g\,t^2}{2} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{g\,(t-\tau)^2}{2},$$

где h_1 *и* h_2 - расстояния, пройденные телами.

Отсюда: $\ell = h_1 - h_2 = g\,t\,\tau - \dfrac{g\tau^2}{2}$ и искомое время: $t = \dfrac{\ell}{g\tau} - \dfrac{\tau}{2}$.

Ответ: $t = \dfrac{\ell}{g\tau} - \dfrac{\tau}{2}$.

1.6. На наклонную плоскость, расположенную под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, с высоты $h = 25\,см$ падает шарик. Определить соотношение расстояний по наклонной плоскости между точками первого, второго и третьего ударов. Удары считать упругими.

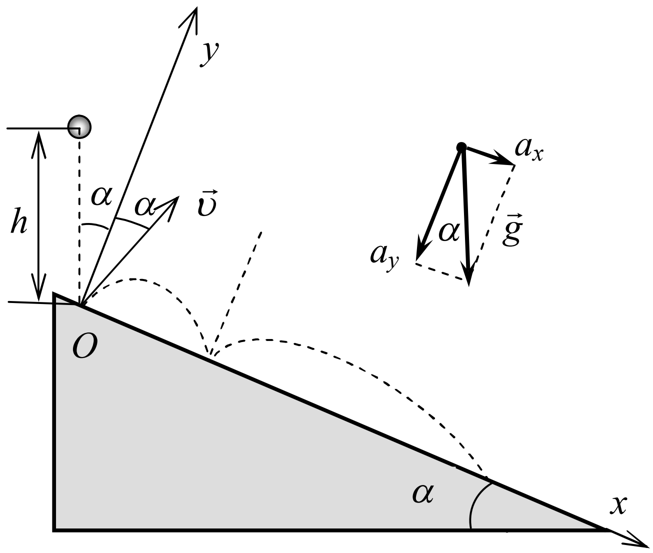

Рис. 1.5

Решение.

Выбираем систему отсчета, связанную с наклонной плоскостью. Ось x направим (рис. 1.5) вдоль плоскости, а ось y – по нормали к ней. Шарик, упав свободно с высоты *h,* в момент соударения с наклонной плоскостью в точке *O* имеет скорость $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$, где g – ускорение свободного падения тела. В этой точке он испытывает упругое отражение и отскакивает со скоростью $\upsilon_{01} = \upsilon_0$ и будет дальше двигаться под углом α к оси y криволинейной траектории (параболе). Затем он опять упадет на наклонную плоскость, снова отразится и т.д. Запишем уравнения движения шарика между ударами:

$$x = \upsilon_{01x}t + \frac{a_x t^2}{2},\ y = \upsilon_{01y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{01x} + a_x t,$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{01y} + a_y t.$$

Согласно условию задачи:

$$\upsilon_{01x} = \upsilon_0 \sin\alpha;\ a_x = g\sin\alpha,$$

$$\upsilon_{01y} = \upsilon_0 \cos\alpha; \;\; a_y = -g\cos\alpha.$$

Подставив эти выражения в формулы для координат и скоростей, получим:

$$x = \upsilon_0 t \sin\alpha + \frac{g\,t^2 \sin\alpha}{2}, \quad \upsilon_x = \upsilon_0 \sin\alpha + g\,t\sin\alpha;$$

$$y = \upsilon_0 t \cos\alpha - \frac{g\,t^2 \cos\alpha}{2}; \quad \upsilon_y = \upsilon_0 \cos\alpha - g\,t\cos\alpha\,.$$

Для определения абсциссы точки второго удара найдем сначала время полета шарика по криволинейной траектории. В момент падения на наклонную плоскость $y = 0$. Следовательно: $\upsilon_0 t\cos\alpha - \dfrac{g t^2 \cos\alpha}{2} = 0.$ Отсюда:

$$t = \frac{2\,\upsilon_0}{g}.$$

Как видно, время движения шарика между ударами не зависит от угла наклона плоскости. Для расстояния $S_1 = |x_1 - x_0|$ между первой и второй точками удара шарика находим:

$$S_1 = \upsilon_0 \sin\alpha\left(\frac{2\upsilon_0}{g}\right) + \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{2\upsilon_0}{g}\right)^2 = 4\upsilon_0^2\,\frac{\sin\alpha}{g} = 8h\sin\alpha\,.$$

Определим теперь расстояние $S_2 = |x_2 - x_1|$ между второй и третьей точками удара шарика о наклонную плоскость:

$$S_2 = \upsilon_{02x} t + \frac{g\,t^2 \sin\alpha}{2},$$

где $\upsilon_{02x} = \upsilon_0 \sin\alpha + g\,t\sin\alpha = \upsilon_0 \sin\alpha + g\sin\alpha\left(\dfrac{2\,\upsilon_0}{g}\right) = 3\,\upsilon_0 \sin\alpha.$

Подставив это выражение в формулу для S_2, получим:

$$S_2 = 3\upsilon_0 t\sin\alpha + \frac{g\,t^2 \sin\alpha}{2} = 3\upsilon_0 \sin\alpha\left(\frac{2\upsilon_0}{g}\right) + \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{2\upsilon_0}{g}\right)^2 =$$

$$= \frac{8\upsilon_0^2}{g}\sin\alpha = 16h\sin\alpha.$$

Аналогично за третий промежуток времени:

$$S_3 = \upsilon_{03x} t + \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha\,.$$

Так как: $\upsilon_{03} = \upsilon_{02} + g\,t\sin\alpha = 3\upsilon_0 \sin\alpha + g\sin\alpha\left(\dfrac{2\upsilon_0}{g}\right) = 5\upsilon_0 \sin\alpha$, то:

$$S_3 = 5\upsilon_0 t\sin\alpha + \frac{1}{2} g\,t^2 \sin\alpha = 24\,h\sin\alpha\,.$$

Таким образом, прослеживается зависимость $S_n = 8\,h\,n\sin\alpha\,.$

Следовательно, расстояния $S_1, S_2, S_3 ...$ относятся между собой как последовательные числа натурального ряда.

Ответ: $S_1 : S_2 : S_3 ... = 1:2:3...$.

1.7. Стрелки часового механизма M_1 и M_2 движутся по одной окружности в одну сторону согласно уравнениям $s_1 = 8 + 2t^2$ и $s_2 = t^4$, где путь s выражен в сантиметрах, а время t – в секундах. Началом отсчета расстояний s_1 и s_2 служит одна точка. Определить время первой встречи обеих точек и значения их скоростей и ускорений в этот момент, если радиус окружности равен R = 16 см.

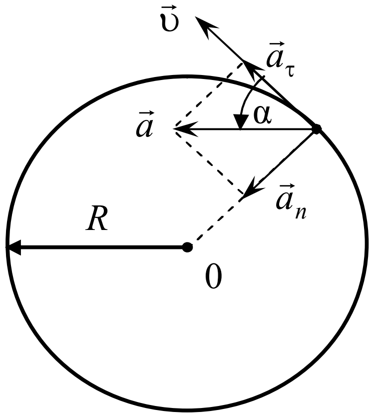

Рис. 1.6

Решение.

Скорости стрелок M_1 и M_2 могут быть найдены как производные пути по времени:

$$\upsilon_1 = \frac{d\,s_1}{d\,t} = 4t; \quad \upsilon_2 = \frac{d\,s_2}{d\,t} = 4t^3. \qquad (1)$$

Тангенциальные ускорения этих стрелок находятся как производные линейной скорости по времени:

$$a_{\tau 1} = \frac{d\,\upsilon_1}{d\,t} = 4; \quad a_{\tau 2} = \frac{d\,\upsilon_2}{d\,t} = 12t^2. \qquad (2)$$

Нормальное ускорение при криволинейном движении выражается через скорость движения и радиус кривизны траектории, тогда с учетом формул (1) получим:

$$a_{n1} = \frac{\upsilon_1^2}{R} = \frac{16t^2}{R}; \; a_{n2} = \frac{\upsilon_2^2}{R} = \frac{16t^6}{R}. \qquad (3)$$

Полное ускорение стрелки, движущейся по криволинейной траектории, может быть найдено (рис. 1.6) как геометрическая сумма тангенциального ускорения, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения, направленного к центру кривизны траектории:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \text{ или по модулю } a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (4)$$

Тогда с учетом формул (2) и (3) модули полных ускорений a_1 и a_2 первой и второй стрелки соответственно равны:

$$a_1 = 4\sqrt{1 + \frac{16\,t^4}{R^2}}; \quad a_2 = 4t^2\sqrt{9 + \frac{16\,t^8}{R^2}}. \qquad (5)$$

Направление полных ускорений $\vec{a}_1$ *и* $\vec{a}_2$ определяется углом, образуемым полным ускорением и линейной скоростью или, соответственно, тангенциальным ускорением, т.е. $\alpha_1 = (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_{\tau 1})$; $\quad \alpha_2 = (\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_{\tau 2})$, тогда:

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_{\tau 1}}{a_1}; \quad \cos\alpha_2 = \frac{a_{\tau 2}}{a_2}. \tag{6}$$

Время, истекшее от начала движения до момента первой встречи движущихся стрелок, можно найти, приравняв расстояния $s_1 = s_2$:

$$8 + 2t^2 = t^4 \text{ или } t^4 - 2t^2 - 8 = 0. \tag{7}$$

Решая это уравнение для времени $t > 0$, получаем:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4+32}}{2}} = 2c. \tag{8}$$

Подставив значение времени в формулы (1) рассчитаем скорости:

$$\upsilon_1 = 4t = 8 см/с; \quad \upsilon_2 = 4t^3 = 32 см/с. \tag{9}$$

Далее, таким же образом по формулам (2) находим тангенциальные ускорения:

$$a_{\tau 1} = 4 см/с^2; \quad a_{\tau 2} = 12t^2 = 48 см/с^2,$$

по формулам (3) находим нормальные ускорения:

$$a_{n1} = \frac{\upsilon_1^2}{R} = \frac{64 см^2/с^2}{16 см} = 4 см/с^2; \quad a_{n2} = \frac{\upsilon_2^2}{R} = \frac{32^2 см^2/с}{16 см} = 64 см/с^2,$$

по формулам (5) находим полные ускорения:

$$a_1 = 4\sqrt{2} см/с^2; \quad a_2 = 80 см/с^2,$$

по формулам (6) найдем углы α, определяющие направления полных ускорений: $\alpha_1 = 45^0$; $\alpha_2 \approx 53^0$.

Ответ: $\upsilon_1 = 4t = 8$ $см/с$; $\upsilon_2 = 4t^3 = 32$ $см/с$; $a_1 = 4\sqrt{2}$ $см/с^2$; $a_2 = 80$ $см/с^2$; $\alpha_1 = 45^0$; $\alpha_2 \approx 53^0$.

1.8. К ящику привязали веревку, другой конец ее перекинули через забор и тянут со скоростью $\vec{u}$. В некоторый момент времени угол между горизонталью и веревкой, привязанной к ящику, равен α. Найти скорость ящика в этот момент.

Решение.

Совместим ось $0X$ с началом основания забора (рис.1.7). Тогда координата ящика, исходя из прямоугольного треугольника, равна:

$$x(t) = h\,ctg\,\alpha(t),$$

где h – высота забора. Скорость движения ящика по определению равна:

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{h}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}. \tag{1}$$

Для того чтобы вычислить производную $\frac{d\alpha}{dt}$, необходимо найти длину веревки для произвольного момента времени: $\ell = \frac{h}{sin\alpha}$.

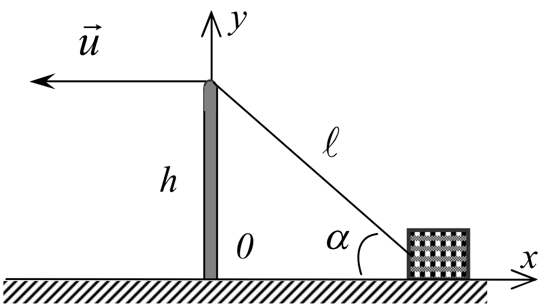

Рис. 1.7

Согласно условию, скорость изменения длины веревки $\frac{d\ell}{dt} = -u$. Знак “–” показывает, что с течением времени длина веревки уменьшается, вектор скорости направлен противоположно направлению координаты *OX*.

Тогда: $-u = \frac{d\ell}{dt} = -\frac{h}{\sin^2\alpha}\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$. (2)

Из (1) и (2) находим: $\upsilon_x = -\frac{u}{\cos\alpha}$.

Ответ: $\upsilon_x = -\frac{u}{\cos\alpha}$.

1.9. При вращении махового колеса его угловое ускорение изменялось по закону $\varepsilon = a - b\omega$, где a и b – некоторые коэффициенты. Чему будет равна угловая скорость маховика через t секунд после начала торможения, если перед торможением она была ω_0?

Решение.

По определению угловое ускорение – это первая производная угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \text{ или } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt},$$

т.к. ось вращения не изменяется. Учитывая условие задачи, произведем разделение переменных и получим:

$$\frac{d\omega}{a - b\omega} = dt. \quad (1)$$

В начальный момент времени (при $t = 0$) угловая скорость равна ω_0, к моменту времени *t* угловая скорость станет равной ω. Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение (1):

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{a - b\omega} = \int_0^t dt. \quad (2)$$

Тогда имеем: $-\dfrac{1}{b}\ \ln\left(a-b\,\omega\right)\Big|_{\omega_0}^{\omega}=t\Big|_0^t,$ (3)

следовательно: $-\dfrac{1}{b}\ln\left(a-b\,\omega\right)+\dfrac{1}{b}\ln\left(a-b\,\omega_0\right)=t$ (4)

$$t=\frac{1}{b}\ \ln\frac{a-b\,\omega_0}{a-b\,\omega}. \quad (5)$$

Откуда последовательно находим:

$$b\,t=\ln\frac{a-b\,\omega_0}{a-b\,\omega};\quad e^{bt}=\frac{a-b\,\omega_0}{a-b\,\omega};\quad \omega=\frac{a}{b}-\left(\frac{a}{b}-\omega_0\right)e^{-bt}. \quad (6)$$

Ответ: $\omega=\dfrac{a}{b}-\left(\dfrac{a}{b}-\omega_0\right)e^{-bt}$.

1.10. Ось колеса (рис. 1.8) радиусом $R=0{,}5\ м$ движется поступательно со скоростью $\upsilon_0=1\ м/с$. Радиус колеса вращается с частотой $\nu=2\ об/с$. Составить уравнение движения точки А обода и определить, как меняется модуль её скорости со временем. Определить, как движется колесо относительно дороги: скользит или буксует.

Решение.

Любая точка обода, например точка B (рис.1.8) участвует в двух движениях - поступательном со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ и вращательном со скоростью $\vec{\upsilon}_{вр}$, тогда скорость точки равна:

$$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\vec{\upsilon}_{вр}. \quad (1)$$

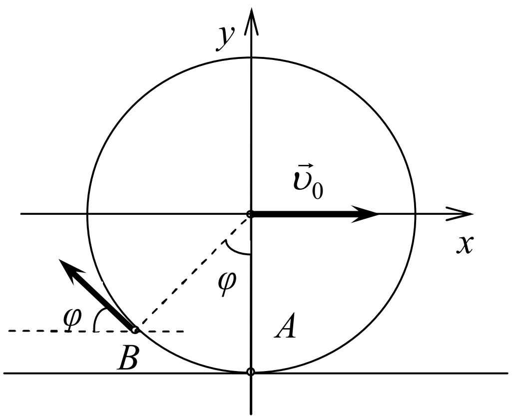

Рис. 1.8

Положение точки B в момент времени t определяется углом $\varphi=\omega t=2\pi\nu\,t$, тогда в проекциях на выбранные оси x и y выражение (1) имеет вид:

x: $\upsilon_x=\upsilon_0-\upsilon_{вр}\cos\varphi=\upsilon_0-\omega R\cos\omega t$ (2)

y: $\upsilon_y=\upsilon_{вр}\sin\varphi=\omega\,R\sin\omega\,t$ (3)

Модуль скорости $\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}$ равен:

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2+\omega^2R^2-2\upsilon_0\,\omega\,R\cos\omega t}. \quad (4)$$

По определению $dx=\upsilon_x dt$ и $dy=\upsilon_y dt$, проинтегрировав эти выражения, определим значения координат x и y в произвольный момент времени

t и учитывая что точка A в момент времени $t=0$, имеет координаты $x(0)=0, \quad y(0)=0$:

$$x=\int_0^t \left(\upsilon_0-\omega R\cos\omega t\right)dt=\upsilon_0 t-R\sin\omega t; \tag{5}$$

$$y=\int_0^t \left(\omega R\sin\omega t\right)dt=2R\sin^2(\omega t/2). \tag{6}$$

Точка A будет соприкасаться с поверхностью дороги в моменты времени, при котором $y=0$. Из уравнения (6), следует:

$$\sin^2(\omega\ t/2)=0 \text{ или } t=\frac{2\pi\ n}{\omega}=\frac{n}{\nu}, \tag{7}$$

где n = 1,2,3,… В эти моменты времени, согласно выражениям (2) и (3) скорости соответственно равны:

$$\upsilon_x=\upsilon_0-\omega R=\upsilon_0-2\pi\nu R=-5{,}28\left(м/с\right), \tag{8}$$

$$\upsilon_y=0. \tag{9}$$

Поскольку $\upsilon_x<0$, то колесо буксует.

Ответ: $\upsilon_x=-5{,}28\left(м/с\right)<0$ - колесо буксует.

1.11. Фреза фрезерного станка движется по закону $\vec{r}=\alpha\sin\left(5t\right)\vec{i}+\beta\cos^2\left(5t\right)\vec{j}$, где $\alpha=2\,м, \quad \beta=3\,м$. Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения.

Решение.

Находим компоненты радиус-вектора:

$$x(t)=\alpha\sin\left(5t\right),$$

$$y(t)=\beta\cos^2\left(5t\right),$$

$$z(t)=0.$$

Таким образом, движение фрезы происходит в плоскости XOY. Далее определим компоненты вектора скорости:

$$\upsilon_x(t)=\dot{x}(t)=5\alpha\cos\left(5t\right), \quad \upsilon_y(t)=-5\beta\sin\left(10t\right).$$

Находим компоненты вектора ускорения:

$$a_x(t)=\dot{\upsilon}_x(t)=-25\alpha\sin\left(5t\right), \quad a_y=\dot{\upsilon}_y(t)=-50\beta\cos\left(10t\right).$$

Для получения уравнения траектории движения исключим время t из первой системы уравнений, учитывая что $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$, получим:

$$y=3-\frac{3}{4}x^2.$$

Полученная функция является параболической.

Ответ: фреза движется по параболе: $y=3-\frac{3}{4}x^2$.